Programowanie współbieżne i rozproszone

WYKŁAD 12

Logika

- Logika – narzędzie formalnego opisu dedukcji.
- Dedukcja – wyprowadzanie prawdziwych stwierdzeń (wniosków) ze stwierdzeń przyjmowanych za prawdziwe (przesłanek).

Logiki

- Logika zdaniowa (Klasyczny rachunek zdań)
- Logika predykatów
- Logiki temporalne

Klasyczny rachunek zdań

- W klasycznym rachunku zdań stwierdzenia są zbudowane ze zmiennych zdaniowych.
- Zmienne zdaniowe można łączyć za pomocą spójników (operatorów) logicznych.
- Formuły klasycznego rachunku zdań definiowane są za pomocą reguł składniowych.
- Semantyka (znaczenie) formuł określana jest przez zdefiniowanie interpretacji przypisującej wartość **true** (prawda) lub **false** (fałsz) każdej formule.

Klasyczny rachunek zdań

- Zbiór symboli obejmuje:
  - symbole stałe **true**, **false**
  - symbole (zmienne) zdaniowe
  - skończony zbiór spójników (operatorów): ¬, ∨, ∧, →, <=>
  - skończony zbiór nawiasów: (,)

- Zbiór spójników (operatorów) jest liczniejszy od wymaganego minimalnego zbioru

Operatory logiczne

- Dla dowolnego *n* liczba wszystkich możliwych operatorów *n*-argumentowych jest skończona.
- Liczba wszystkich możliwych operatorów *n*-argumentowych $op(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$2^{2^n}$$

Operatory logiczne

x1 x2	1 1	1 0	0 1	0 0	operator
o1	0	0	0	0	
o2	0	0	0	1	negacja alternatywy
o3	0	0	1	0	
o4	0	0	1	1	
o5	0	1	0	0	
o6	0	1	0	1	
o7	0	1	1	0	alternatywa wykluczająca
o8	0	1	1	1	negacja koniunkcji
o9	1	0	0	0	koniunkcja
o10	1	0	0	1	równoważność
o11	1	0	1	0	
o12	1	0	1	1	implikacja
o13	1	1	0	0	
o14	1	1	0	1	
o15	1	1	1	0	alternatywa
o16	1	1	1	1	

Operatory logiczne - notacja

$a \vee b$ *alternatywa*

$a \wedge b$ *koniunkcja*

$a \rightarrow b$ *implikacja*

$a \Leftrightarrow b$ *równoważność*

$a \downarrow b$ *negacja alternatywy*

$a \uparrow b$ *negacja koniunkcji*

$a \oplus b$ *alternatywa wykluczająca*

Wartościowanie

- P – zbiór zmiennych zdaniowych (zdań atomowych)
- Wartościowanie jest funkcją:

$$v : P \rightarrow \{0,1\}$$

przypisującą każdej zmiennej zdaniowej jedną z wartości logicznych (0 albo 1).

Interpretacja

- F – zbiór formuł
- Interpretacja jest funkcją:

$$v : F \to \{0,1\}$$

przypisującą formułom wartości logiczne (0 albo 1) na podstawie definicji indukcyjnych:

$$A = \neg B$$

$$v(A) = \begin{cases} 0 & dla \quad v(B) = 1 \\ 1 & dla \quad v(B) = 0 \end{cases}$$

Interpretacja

$$A = B \vee C$$

$$v(A) = \begin{cases} 0 & dla \quad v(B) = 0 \; i \; v(C) = 0 \\ 1 & w \; przeciwnym \; przypadku \end{cases}$$

$$A = B \wedge C$$

$$v(A) = \begin{cases} 1 & dla \quad v(B) = 1 \; i \; v(C) = 1 \\ 0 & w \; przeciwnym \; przypadku \end{cases}$$

Interpretacja

$$A = B \rightarrow C$$

$$v(A) = \begin{cases} 0 & dla \;\; v(B) = 1 \; i \; v(C) = 0 \\ 1 & w \; przeciwnym \; przypadku \end{cases}$$

$$A = B \Leftrightarrow C$$

$$v(A) = \begin{cases} 1 & dla \;\; v(B) = v(C) \\ 0 & dla \;\; v(B) \neq v(C) \end{cases}$$

Interpretacja

$$A = B \uparrow C$$

$$v(A) = \begin{cases} 0 & dla \ \ v(B) = 1 \ i \ v(C) = 1 \\ 1 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

$$A = B \downarrow C$$

$$v(A) = \begin{cases} 1 & dla \ \ v(B) = 0 \ i \ v(C) = 0 \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Interpretacja

$$A = B \oplus C$$

$$v(A) = \begin{Bmatrix} 1 & dla & v(B) \neq v(C) \\ 0 & dla & v(B) = v(C) \end{Bmatrix}$$

Wartościowanie a interpretacja

- Każde wartościowanie można rozszerzyć do dokładnie jednej interpretacji.

Spełnialność i prawdziwość

- Formuła klasycznego rachunku zdań *A* jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy $v(A)=1$ dla pewnej interpretacji *v*.
- Interpretacja spełniająca formułę *A* nazywana jest modelem *A*
- Formuła *A* jest prawdziwa, co zapisujemy $|=A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(A)=1$ dla wszystkich interpretacji *v*.
- Formuła prawdziwa jest nazywana tautologią.

Spełnialność i prawdziwość

- Formuła klasycznego rachunku zdań A jest niespełnialna (sprzeczna) wtedy i tylko wtedy, gdy $v(A)=0$ dla wszystkich interpretacji v.
- Formuła A jest nieprawdziwa, co zapisujemy $|\neq A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(A)=0$ dla pewnej interpretacji v.

Logiki temporalne

- Logiki temporalne – logiki formalne otrzymane przez dodanie operatorów temporalnych do klasycznego rachunku zdań lub logiki predykatów.
- Logiki temporalne:
  - logiki temporalne czasu liniowego
  - logiki temporalne czasu rozgałęzionego

Logiki temporalne

- Logiki temporalne mogą być wykorzystywane do specyfikacji i automatycznej weryfikacji systemów współbieżnych.

Struktura Kripkego

- Znaczenie formuł logik temporalnych definiowane jest zazwyczaj z użyciem struktury Kripkego:

$$M = \langle S, s^0, \rightarrow, v \rangle$$

S - skończony zbiór stanów

s^0 - wyróżniony stan początkowy

$\rightarrow \subseteq S \times S$ - binarna relacja przejścia

$v : S \rightarrow 2^P$ - funkcja etykietująca stany zbiorem zmiennych zdaniowych prawdziwych w tych stanach

Struktura Kripkego

- Jeśli relacja $\rightarrow$ spełnia następujący warunek:
  - dla każdego stanu *s* należącego do *S*, istnieje dokładnie jeden stan *s*' należacy do *S* taki, że

$$(s, s') \in \rightarrow$$

to wówczas mamy do czynienia z <u>logiką czasu liniowego</u>. W przeciwnym razie mamy do czynienia z <u>logiką czasu rozgałęzionego</u>.

Logiki temporalne czasu liniowego

- Wykorzystują naturalne podejście do czasu, tzn. wykorzystywana jest liniowa struktura czasu – istnieje dokładnie jedna możliwa przyszłość.
- Poszczególne zdarzenie rozpatrywane są w czasie w określonej sekwencji.
- Operatory temporalne opisują zdarzenia zachodzące wzdłuż jednej wybranej linii czasowej.

Logiki temporalne czasu liniowego

- Logika LTL (Linear Temporal Logic):
  - zbiór symboli obejmuje:
    - wszystkie symbole klasycznego rachunku zdań
    - skończony zbiór symboli (operatorów) temporalnych:
      - X - „w następnej chwili czasowej” (*next time*)
      - U - „dopóty” (*until*)
      - G - „teraz i zawsze w przyszłości” (*globally*)
      - F – „kiedyś w przyszłości” (*eventually*)
      - R - „zwalnia” (*releases*)

dodatkowe operatory temporalne

Logiki temporalne czasu liniowego

- Logika LTL:
  - zbiór wszystkich formuł definiowany jest indukcyjnie:
    - każda formuła klasycznego rachunku zdań jest formułą LTL
    - jeżeli α i β są formułami LTL, to $X\alpha$ oraz $\alpha U\beta$ są również formułami LTL

Logiki temporalne czasu liniowego

- Logika LTL:

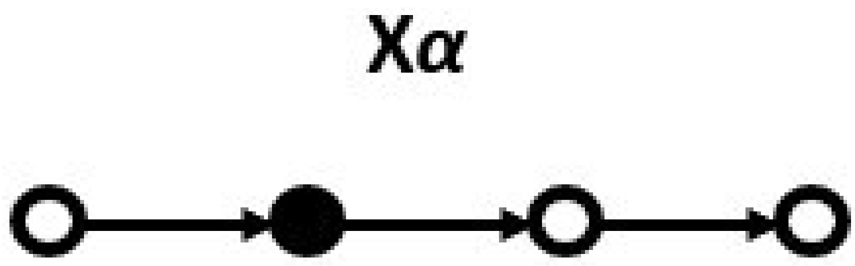
$$\models \quad \mathrm{F}\,\alpha <=> \textbf{true}\,\mathrm{U}\,\alpha$$

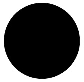
$$\models \quad \alpha\,\mathrm{R}\,\beta <=> \neg\left(\neg\alpha\,\mathrm{U}\,\neg\beta\right)$$

$$\models \quad \mathrm{G}\,\alpha <=> \neg\left(\textbf{true}\,\mathrm{U}\,\neg\alpha\right)$$

Logiki temporalne czasu liniowego

- Logika LTL:

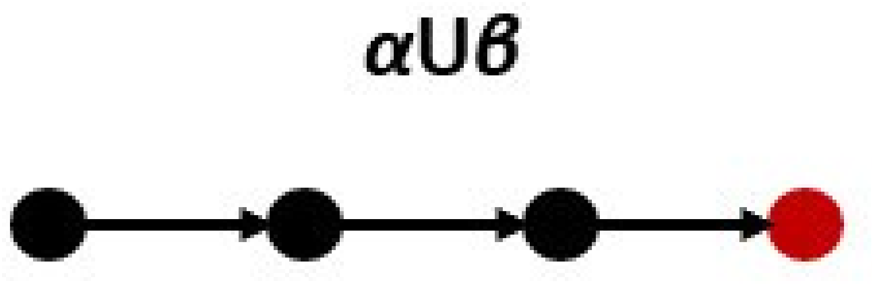


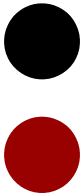


- prawdziwa formuła α

Logiki temporalne czasu liniowego

- Logika LTL:

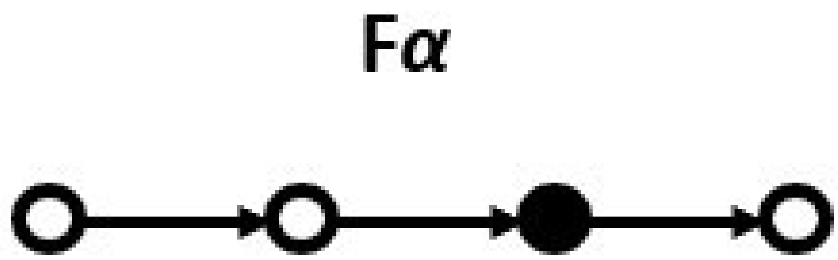


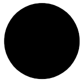


- prawdziwa formuła α
- prawdziwa formuła β

Logiki temporalne czasu liniowego

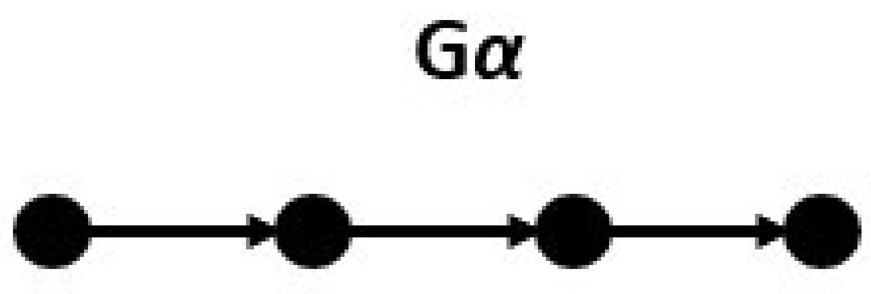
- Logika LTL:



 - prawdziwa formuła α

Logiki temporalne czasu liniowego

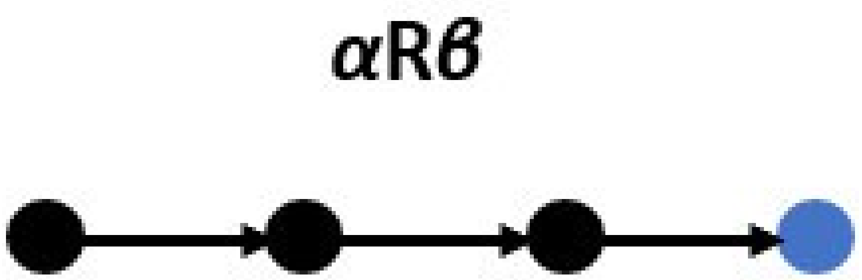
- Logika LTL:



● - prawdziwa formuła α

Logiki temporalne czasu liniowego

- Logika LTL:



- prawdziwa formuła α

- prawdziwe formuły α i β

Logiki temporalne czasu rozgałęzionego

- Wykorzystywana jest drzewiasta struktura czasu – w każdym momencie czas może się rozgałęzić, dając w wyniku wiele możliwych przyszłości.
- Operatory temporalne pozwalają dodatkowo na kwantyfikację po wszystkich możliwych przyszłościach.

Logiki temporalne czasu rozgałęzionego

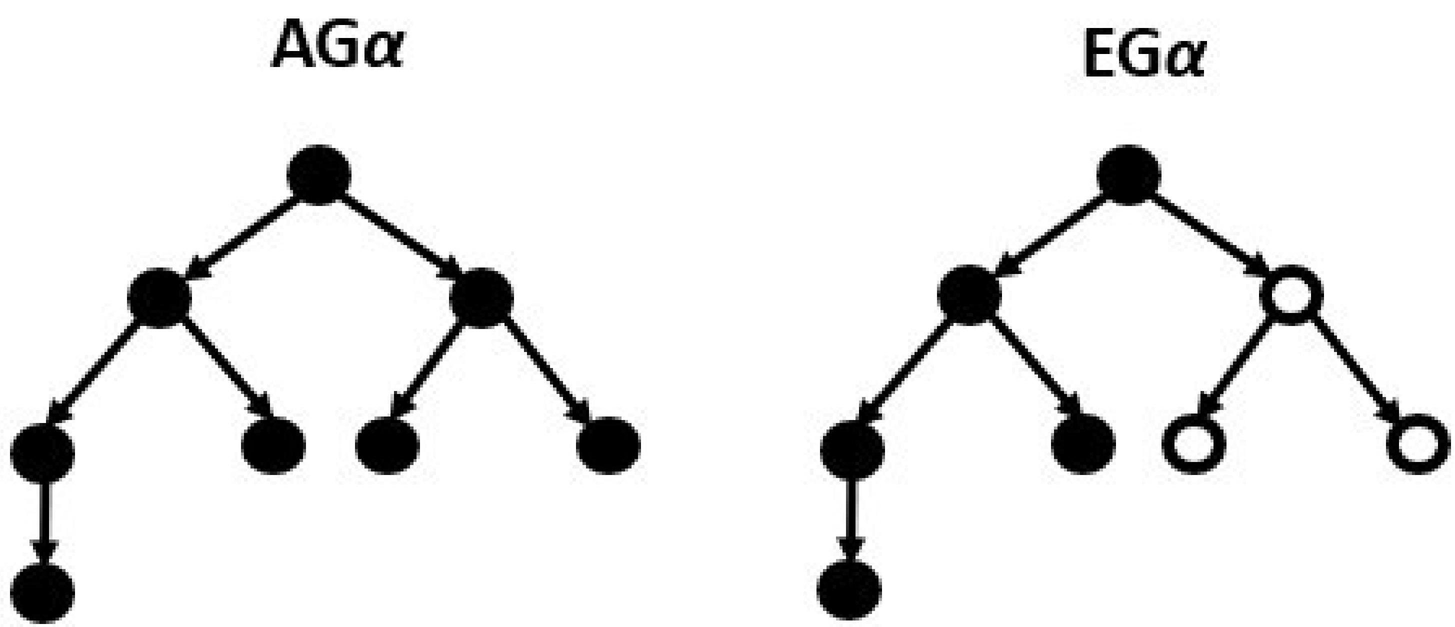
- Logika CTL* (Computational Tree Logic):
  - zbiór symboli obejmuje:
    - wszystkie symbole klasycznego rachunku zdań
    - skończony zbiór symboli temporalnych:
      - X - „w następnej chwili czasowej” (*next time*)
      - U - „dopóty” (*until*)
      - G - „teraz i zawsze w przyszłości” (*globally*)
      - F – „kiedyś w przyszłości” (*eventually*)
      - R - „zwalnia” (*releases*)
    - skończony zbiór kwantyfikatorów ścieżkowych:
      - A - „zawsze” (*always*)
      - E - „istnieje” (*exists*)

Logiki temporalne czasu rozgałęzionego

- Logika CTL*:
  - zbiór wszystkich formuł stanowych definiowany jest indukcyjnie:
    - każdy element zbioru *P* jest formułą stanową
    - jeżeli α i β są formułami stanowymi, to $\neg\alpha$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha <=> \beta$, są również formułami stanowymi
    - jeżeli α jest formułą ścieżkową, to $\mathrm{E}\alpha$ i $\mathrm{A}\alpha$ są formułami stanowymi
    - każda formuła stanowa jest również formułą ścieżkową
    - jeżeli α i β są formułami ścieżkowymi, to $\neg\alpha$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha <=> \beta$, $\mathrm{G}\alpha$, $\mathrm{F}\alpha$, $\mathrm{X}\alpha$, $\alpha \mathrm{U} \beta$ oraz $\alpha \mathrm{R} \beta$ są również formułami ścieżkowymi

Logiki temporalne czasu rozgałęzionego

- Logika CTL* (Computational Tree Logic):

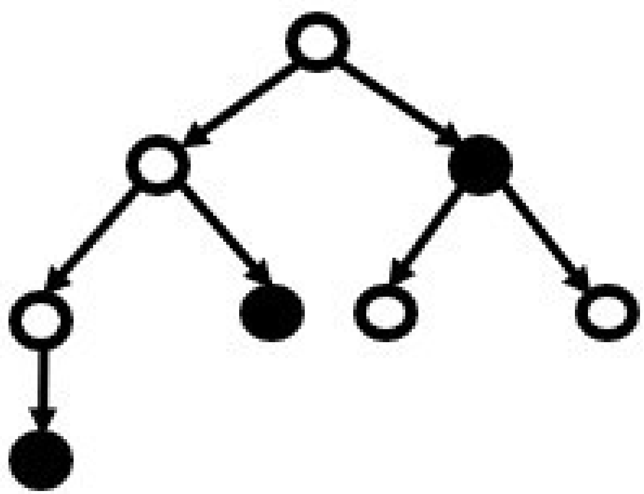


● - prawdziwa formuła stanowa α

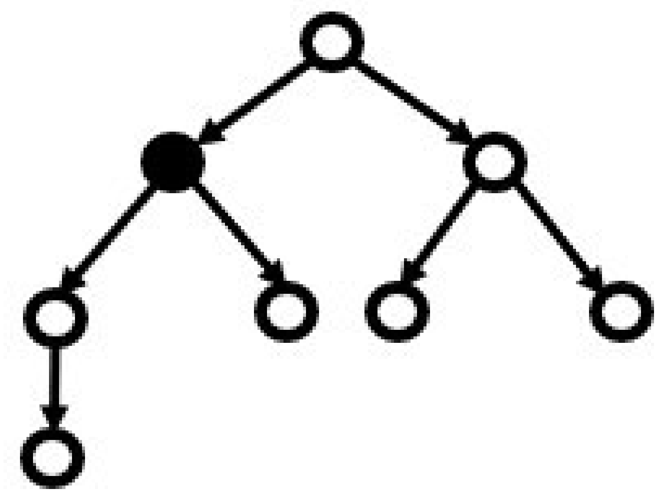
Logiki temporalne czasu rozgałęzionego

- Logika CTL* (Computational Tree Logic):

$AF\alpha$



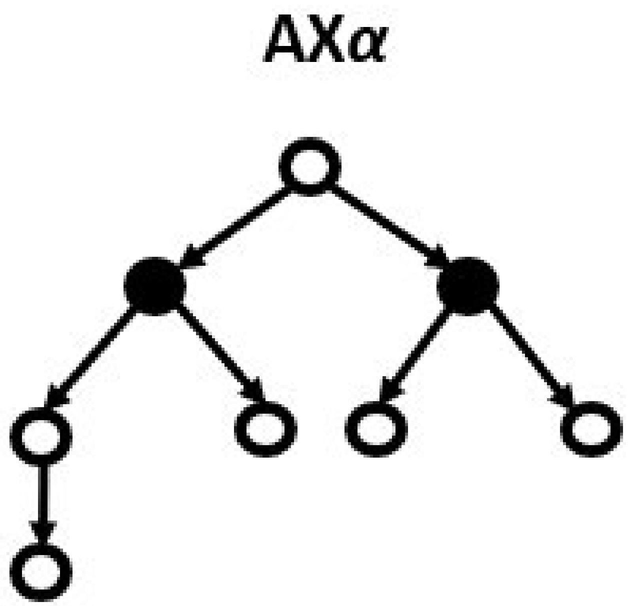
$EF\alpha$

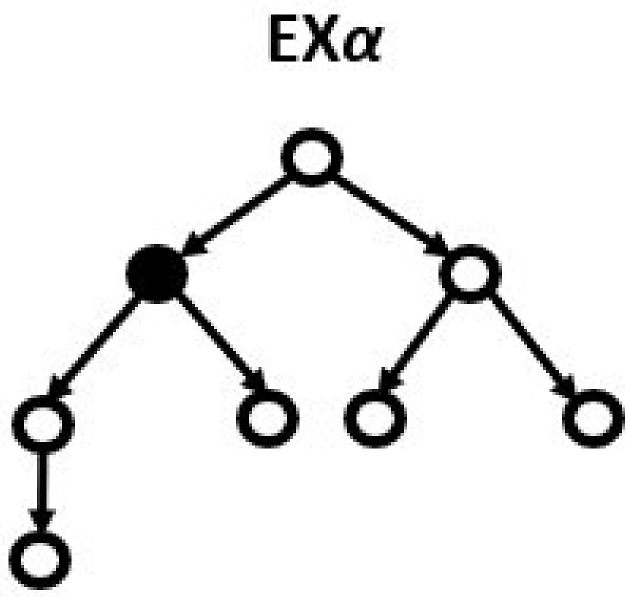


● - prawdziwa formuła stanowa α

Logiki temporalne czasu rozgałęzionego

- Logika CTL* (Computational Tree Logic):





● - prawdziwa formuła stanowa α